Endomorphisme des espaces euclidiens

E désigne un espace vectoriel euclidien.

I. Automorphismes orthogonaux

1°) Matrices orthogonales

Déf : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi ${}^tAA = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Prop : On a équivalence entre :
(i) A est une matrice orthogonale,
(ii) A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.
(iii) $A{}^tA = I_n$.

Prop : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé groupe orthogonal d'ordre n.

Prop : Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\det A = \pm 1$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1,-1\}$.

Théorème :
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1,\ldots,C_n$ et de lignes $L_1,\ldots,L_n$.
On a équivalence entre :
(i) A est orthogonale
(ii) la famille $(C_1,\ldots,C_n)$ est orthonormale
(iii) la famille $(L_1,\ldots,L_n)$ est orthonormale.

Cor : La matrice de passage entre deux bases orthonormées est orthogonale (donc facile à inverser)

2°) Matrice de rotation

Déf : Les matrices orthogonales de déterminant 1 sont appelées matrice de rotations. On note $SO_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Prop : $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n.

3°) Automorphismes orthogonaux

Déf : On appelle automorphisme orthogonal de E tout endomorphisme u de E conservant le produit scalaire i.e. $\forall x,y \in E, (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$. On note $O(E)$ l'ensemble de ces applications.

Prop : On a équivalence entre :
(i) u est un automorphisme orthogonal,
(ii) u conserve la norme i.e. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

Prop : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ appelé groupe orthogonal de E.

Théorème :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On a équivalence entre :
(i) $u \in O(E)$,
(ii) $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée,
(iii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

Cor : Si $u \in O(E)$ alors $\det u = \pm 1$ et $\mathrm{Sp}(u) \subset \{1,-1\}$.

4°) Rotations

Déf : On appelle rotation de E tout automorphisme orthogonale de déterminant 1. On note $SO(E)$ l'ensemble des rotations de E.

Prop : $SO(E)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$ appelé groupe spécial orthogonal de E.

Les rotations d'un plan euclidien orienté ont même matrice dans toute base orthonormée directe. Celles-ci sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et commutent entre elles.

II. Adjoint d'un endomorphisme

1°) Définition

Théorème :

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme u^* de E vérifiant :

$\forall x, y \in E,\ (u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y))$.

De plus, dans toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right]$.

Déf : L'endomorphisme u^* est appelé adjoint de l'endomorphisme u.

Théorème :

L'application $u \mapsto u^*$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Prop : $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ u^{**} = u$.

$\forall u, v \in \mathcal{L}(E),\ (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

$\forall u \in GL(E),\ u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \left(P(u)\right)^* = P(u^*)$.

2°) Propriétés

Théorème :

$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$, $\mathrm{tr}(u^*) = \mathrm{tr}(u)$, $\det u^* = \det u$, $\chi_{u^*} = \chi_u$, $\ker(u^*) = \left[\mathrm{Im}\, u\right]^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*) = \left[\ker u\right]^\perp$.

Cor : u et u^* ont mêmes valeurs propres et celles-ci ont mêmes multiplicités.

Prop : u est diagonalisable (resp. trigonalisable) ssi u^* l'est.

3°) Sous-espaces vectoriels stables

Théorème :

Un sous-espace vectoriel F est stable pour u ssi $F^\perp$ est stable pour u^*.

Cor : Les hyperplans stables par u sont ceux dont un vecteur normal est vecteur propre de u^*.

III. Endomorphismes autoadjoints

1°) Définition

Déf : Un endomorphisme u de E est dit autoadjoint (ou symétrique) ssi $u^* = u$.
On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Théorème :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On a équivalence entre :

(i) u est autoadjoint,

(ii) $\forall x, y \in E, (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$,

(iii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$.

Cor : $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2°) Réduction des endomorphismes autoadjoints

Prop : Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

Prop : Tout endomorphisme autoadjoint u de $E \neq \{0\}$ possède au moins une valeur propre réelle.

Théorème :

Si u est une endomorphisme autoadjoint de E alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u. Ainsi u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Cor : Si $u \in \mathcal{S}(E)$ alors E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.

Cor : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable par le biais d'une matrice orthogonale :
$\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}), \exists D \in D_n(\mathbb{R}), A = {}^tPDP$

3°) Forme bilinéaire symétrique associée

Prop : Si $u \in \mathcal{S}(E)$ alors l'application $\varphi_u : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = (u(x) \mid y)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E dont la matrice dans une base orthonormée est égale à celle de u.

Déf : On dit que φ_u est la forme bilinéaire symétrique associée à l'endomorphisme automorphisme adjoint u.

Théorème :

L'application $\phi : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{BS}(E)$ définie par $\phi(u) = \varphi_u$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Cor : $\forall \varphi \in \mathcal{BS}(E)$, $\exists ! u \in \mathcal{S}(E)$, $\varphi = \varphi_u$ i.e. $\forall (x,y) \in E, \varphi(x,y) = (u(x) \mid y)$.

Déf : On dit que u est l'endomorphisme autoadjoint associée à la forme bilinéaire symétrique φ.

Cor : Pour toute forme bilinéaire symétrique φ sur E il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ soit diagonale.

4°) Positivité

Déf : Un endomorphisme autoadjoint u de E est dit positif ssi $\forall x \in E, (u(x) \mid x) \geq 0$.

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble de ces endomorphismes.

Un endomorphisme autoadjoint u de E est dit défini positif ssi il est positif et $\forall x \in E, (u(x) \mid x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble de ces endomorphismes.

Théorème :

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E, φ la forme bilinéaire symétrique associée à u et A la matrice de u dans une certaine base orthonormée. On a équivalence entre :
(i) u est (définie) positif,
(ii) φ est (définie) positive,
(iii) A est (définie) positive.

Théorème :

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.
u est positif (resp. défini positif) ssi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$).

Cor : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors A est positive (resp. définie positive) ssi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$).

5°) Norme d'endomorphisme

Théorème :

$\forall u \in S^+(E)$, $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} (u(x) \mid x) = \rho(u)$

où $\rho(u)$ désigne la plus grande valeur propre de u (rayon spectral)